1. Medan listrik akibat muatan $q$ diberikan oleh

$$E(q)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{x^2}$$

Medan listrik akibat muatan -$q$ diberikan oleh

$$E(-q)=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qx}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$

Medan total diberikan oleh

$$E=E(q)+E(-q)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}\left[1-\left(1+\frac{R^2}{x^2}\right)^{-3/2}\right]$$

Untuk $x \gg R$, didapat

$$E\approx\frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}\left[1-\left(1-\frac{3}{2}\frac{R^2}{x^2}\right)\right]=\frac{3qR^2}{8\pi\epsilon_0 x^4}$$

2. Untuk memudahkan proses perhitungan, anggap **a** dalam arah sumbu $z$. Rapat muatan permukaan diberikan oleh $\sigma = ar\cos\theta$. Medan listrik akibat suatu elemen luasan kecil dipermukaan bola diberikan oleh

$$d\mathbf{E}=\frac{\sigma r\,d\theta\, r\sin\theta\, d\varphi}{4\pi\epsilon_0 r^2}(-\hat{\mathbf{r}})=-\frac{ar\cos\theta\, d\theta\sin\theta\, d\varphi}{4\pi\epsilon_0}\left(\sin\theta\cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}}+\sin\theta\sin\varphi\,\hat{\mathbf{y}}+\cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}\right)$$

Integralkan medan di atas. Dari simetri, didapat bahwa komponen $x$ dan $y$ akan saling menghapuskan, sehingga didapat hanya medan dalam arah $z$:

$$\mathbf{E}=-\frac{ar}{4\pi\epsilon_0}\left(\int_0^\pi \sin\theta\cos^2\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\hat{\mathbf{z}}=-\frac{ar}{3\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}$$

Hasil ini menunjukkan arah medan **E** berlawanan dengan arah sumbu $z$. Jika vektor **a** yang digunakan dalam arah yang umum, maka hasil akhir dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\mathbf{E}=-\frac{\mathbf{a}\,r}{3\epsilon_0}$$

3. Pertama hitung keadaan ketika belum ada lubang. Dalam keadaan ini, medan listrik dapat dihitung dengan menggunakan hukum Gauss. Karena keping memiliki simetri bidang, maka didapat

$$E=\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad .$$

Dalam keadaan kesetimbangan, besar gaya gravitasi sama dengan besar gaya listrik:

$$mg = qE.$$

Sekarang tinjau keaadan dimana permukaan keping dibuat lubang. Medan listrik pada titik yang sama dapat diperoleh dengan menjumlahkan medan akibat dari keping tak berhingga yang memiliki rapat muatan positif +*σ*, dengan medan akibat dari suatu piringan dengan jari-jari *R* yang memiliki rapat muatan negatif -*σ*. Besar medan akibat piringan ini adalah

$$E_1 = \int \frac{\sigma\, r\, d\theta\, dr\, h}{4\pi\epsilon_0 \left(h^2 + r^2\right)^{3/2}} \quad ,$$

dengan *h* adalah jarak titik dari keping. Selesaikan integral di atas, didapat

$$E_1 = \frac{\sigma h}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + R^2}}\right)$$

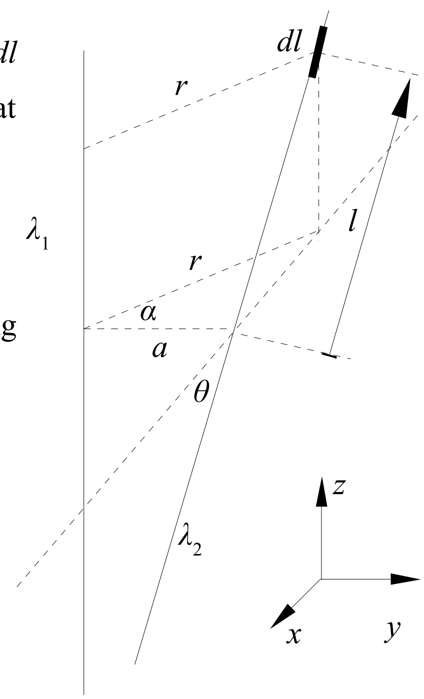
Perbedaan medan ini yang akan memberi percepatan ke muatan ke arah bawah:

$$F = q\, E_1 = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}\right) = mg\left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}\right)$$

Jadi percepatan diberikan oleh

$$a = \frac{F}{m} = g\left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}\right)$$

4. Perhatikan gambar di samping. Tinjau satu elemen panjang *dl* pada kawat 2. Medan listrik yang dirasakan elemen ini akiat kawat 1 adalah




$$E = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r} \quad ,$$

yang mengarah radial ke luar dalam arah $\hat{\mathbf{r}}$. Maka gaya yang dirasakan elemen ini dalam koordinat kartesian adalah

$$d\,\mathbf{F} = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r}\left(\cos\alpha\,\hat{\mathbf{y}} - \sin\alpha\,\hat{\mathbf{x}}\right)\lambda_2\, dl \quad .$$

Hubungan jarak *r* dan variabel lain diberikan oleh

$$r = \sqrt{a^2 + l^2\cos^2\theta} \quad .$$

Dengan menggunakan hubungan ini didapat

$$d\,\mathbf{F} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{a\, dl}{a^2 + l^2\cos^2\theta}\hat{\mathbf{y}} - \frac{l\cos\theta\, dl}{a^2 + l^2\cos^2\theta}\hat{\mathbf{x}}\right) \quad .$$

Suku kedua merupakan fungsi ganjil, sehingga integral terhadap batas yang simetris akan memberi hasil nol. Ini juga terlihat dari simetri sistem. Gaya total diberikan oleh

$$\mathbf{F} = \frac{\lambda_1\lambda_2 a}{2\pi\epsilon_0}\int \frac{dl}{a^2 + l^2\cos^2\theta}\hat{\mathbf{y}} = \frac{\lambda_1\lambda_2 a}{2\pi\epsilon_0}\frac{\pi}{a}\cos\theta\,\hat{\mathbf{y}}$$

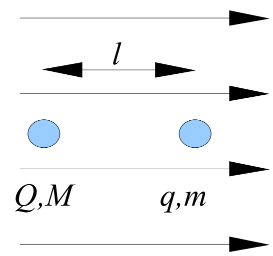
$$\mathbf{F}=\frac{\lambda_1\lambda_2}{2\epsilon_0\cos\theta}\hat{\mathbf{y}} \quad .$$

Untuk kasus khusus

$\theta = 0,\qquad \mathbf{F}=\frac{\lambda_1\lambda_2}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{y}} \quad ,$

$\theta = \pi,\qquad \mathbf{F}=\infty \quad .$

5. Percepatan massa $M$:




$$a_M=\frac{QE}{M}-\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 l^2 M} \quad .$$

Percepatan massa $m$:

$$a_m=\frac{QE}{m}+\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 l^2 m}$$

Syarat supaya bergerak bersama dengan menjaga jarak $l$ tetap adalah kedua percepatan ini sama.

$$\frac{QE}{M}-\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 l^2 M}=\frac{qE}{m}+\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 l^2 m}$$

Selesaikan persamaan ini, didapat

$$l=\sqrt{\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 E}\frac{m+M}{Qm-qM}} \quad .$$

Syarat agar ada harga $l$ adalah $\frac{qQ}{Qm-qM}>0$ . Ada 4 kasus yang harus ditinjau:

| | | |
|---|---|---|
| Jika | $Q > 0, q > 0,$ | $Qm > qM,$ |
| | $Q < 0, q > 0,$ | bisa untuk semua hubungan $Q, q, M,$ dan $m$, |
| | $Q > 0, q < 0,$ | tidak bisa untuk semua hubungan $Q, q, M,$ dan $m$, |
| | $Q < 0, q < 0,$ | $\lvert q\rvert M > \lvert Q\rvert m$. |

6. Namakan muatan paling kiri ($q,m$) sebagai muatan 1, muatan di tengah ($q,2m$) sebagai muatan 2 dan muatan paling kanan ($2q,5m$) sebagai muatan 3. Percepatan masing masing muatan adalah

$$a_1=-\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 ma^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{2}{2^2}\right)=-\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 ma^2}\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$a_2=-\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 ma^2}\left(\frac{1}{1^2.2}-\frac{2}{1^2.2}\right)=-\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 ma^2}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$a_3=\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 ma^2}\left(\frac{2}{2^2.5}+\frac{2}{1^2.5}\right)=\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 ma^2}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Percepatan relatif 1 dan 2 : $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 ma^2}(1)$

Percepatan relatif 2 dan 3: $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 ma^2}(1)$

Jadi walaupun semua partikel bergerak saling menjauh, tetapi jarak antara muatan 1 dan 2 selalu sama dengan jarak antara muatan 2 dan 3. Karena mula-mula semua partikel diam, dan hubungan kecepatan sebanding dengan percepatan, maka diperoleh

$|v_1| : |v_2| : |v_3| = |a_1| : |a_2| : |a_3| = 3 : 1 : 1.$

Definisikan $|v_1| = 3\ v_0$, $|v_2| = v_0$, $|v_3| = v_0$.

Gunakan kekekalan energi:

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}+\frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0(2a)}+\frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 a}=\frac{1}{2}m(3v_0)^2+\frac{1}{2}2mv_0^2+\frac{1}{2}5mv_0^2$$

didapat

$$v_0=\sqrt{\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 ma}}$$

Jadi $$v_1=3\sqrt{\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 ma}}$$

$$v_2=\sqrt{\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 ma}}$$

$$v_3=\sqrt{\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 ma}}$$