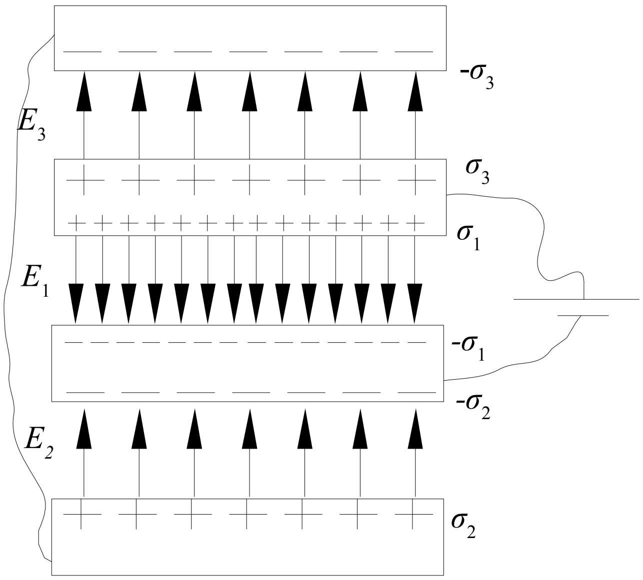
1.



a.

Namakan keping paling atas adalah keping A, keping kedua dari atas adalah keping B, keping ketiga dari atas adalah keping C dan keping paling bawah adalah keping D.

Muatan bawah keping B = - muatan atas keping C, agar tidak ada muatan menembus keping 2 dan 3. Demikian juga dengan muatan bawah keping A dan muatan atas keping B. Juga berlaku untuk muatan bawah keping C dan muatan atas keping D.

Dari ketiga argumen di atas, didapat gambaran sebaran muatan seperti pada gambar.

Karena mula-mula keping A dan keping D tidak bermuatan, maka muatan total keduanya harus nol.

Jadi $\sigma_2 = \sigma_3$.

Jadi $E_1 = \dfrac{\sigma_1}{\epsilon_0}$, $E_2 = \dfrac{\sigma_2}{\epsilon_0}$ dan $E_3 = \dfrac{\sigma_3}{\epsilon_0}$

Tetapi integral garis dari keping A ke keping D harus nol, karena keduanya memiliki potensial yang sama akibat dihubungkan oleh kawat.

Jadi $-E_3\, d + E_1\, d - E_2\, d = 0$, dengan d adalah jarak masing-masing keping.

Jadi didapat $E_2 = \frac{1}{2} E_1$.

Tetapi karena $V_B - V_C = \Delta\varphi$,

maka didapat $E_1 = \dfrac{\Delta\varphi}{d}$, $E_2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta\varphi}{d}$ dan $E_3 = \dfrac{\Delta\varphi}{d}$.

b.

Keping A: $\sigma_A = -\sigma_3 = -\dfrac{\epsilon_0 \Delta\varphi}{2d}$

Keping B: $\sigma_B = \sigma_3 + \sigma_1 = +\dfrac{3\epsilon_0 \Delta\varphi}{2d}$

Keping C: $\sigma_C = -\sigma_1 - \sigma_2 = -\dfrac{3\epsilon_0 \Delta\varphi}{2d}$

Keping D: $\sigma_D = \sigma_2 = +\dfrac{\epsilon_0 \Delta\varphi}{2d}$

2. Tinjau sebuah titik sembarang pada permukaan konduktor. Anggap muatan per satuan luas pada permukaan konduktor di titik ini adalah σ_f. Jadi dengan menggunakan hukum Gauss didapat

   $D = \sigma_f$.

   Dengan menggunakan hubungan $\mathbf{D}=\epsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$ dan $\mathbf{D}=\epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E}$, didapat

   $$\mathbf{P}=\frac{\mathbf{D}}{\epsilon_r}\left(\epsilon_r-1\right) \quad .$$

   Dari definisi muatan terikat (*bound charges*), didapat rapat muatan terikat di dielektrik dekat titik sembarang ini adalah

   $$\sigma_{\mathrm{b}}=\mathbf{P}\,.\,\hat{\mathbf{n}}=-\frac{\sigma_{\mathrm{f}}}{\epsilon_r}\left(\epsilon_r-1\right)$$

   Total muatan terikat di dielektrik didapat dengan mengintegrasikan pada seluruh permukaan. Karena nilai ε_r uniform, maka didapat

   $$q_{\mathrm{b,in}}=\oint\sigma_{\mathrm{b}}\,dA=-\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r}\oint\sigma\,dA=-\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r}q$$

   Karena dielektrik netral, maka muatan terikat pada permukaan luar = - muatan terikat pada permukaan dalam.

   $$q_{\mathrm{b,out}}=\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r}q$$

   Hasil ini sebenarnya hanya benar jika kita bisa menjamin bahwa rapat muatan terikat ρ_b adalah nol di dalam media. Dari definisi rapat muatan terikat

   $$\rho_{\mathrm{b}}=-\nabla\cdot\mathbf{P}=-\nabla\cdot\left(\mathbf{D}\left(1-\frac{1}{\epsilon_r}\right)\right) \quad .$$

   Tetapi karena tidak ada muatan bebas dalam dielektrik dan juga karena ε_r uniform, maka nilai ρ_b adalah nol.

3. Pengerjaan soal ini memerlukan muatan bayangan. Pertama anggap bola dibumikan. Dari perumusan standar metode bayangan, didapat muatan bayangan -q' terletak pada jarak x dari pusat bola dengan nilai nilai sebagai berikut

   $x = R/3$,

   $q' = q/3$.

   Dengan memunculkan muatan bayangan ini, bola menjadi bermuatan -$q/3$. Sedangkan mula-mula bola bermuatan Q. Untuk membuat bola seperti muatan mula-mula, maka perlu diletakkan muatan $Q + q/3$ di suatu posisi yang masihh menjamin ekuipotensial pada permukaan bola. Posisi ini adalah di pusat bola. Potensial di permukaan bola dapat dihitung dari pengaruh muatan q di jarak

$3R$ dari pusat bola, muatan bayangan $-q/3$ di jarak $R/3$ dari pusat bola dan muatan $(Q + q/3)$ di pusat bola. Tetapi kedua muatan pertama memberikan potensial nol di permukaan bola, sehingga, potensial permukaan bola adalah

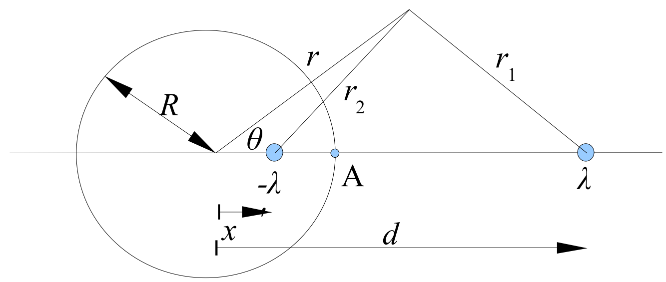
$$V(r=R)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q+q/3}{R} \quad .$$

Pada konduktor, potensial di dalam bola sama dengan potensial di permukaan bola, sehingga

$$V(r=R/2)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q+q/3}{R}$$

4. Ambil titik A sebagai acuan:

$$V=-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{r_1}{d-R}\right)+\frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{r_2}{R-x}\right)$$



$$V=-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{2}\ln\left(d^2+r^2-2\,d\,r\cos\theta\right)+\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln(d-R)$$

$$+\frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{2}\ln\left(x^2+r^2-2\,x\,r\cos\theta\right)-\frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0}\ln(R-x)$$

Karena permukaan silinder ekuipotensial maka $E_\theta(r=R) = 0$ atau $\frac{\partial V}{\partial\theta}=0$ di $r=R$.

didapat $-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{2}\frac{2\,d\,R\sin\theta}{d^2+R^2-2\,d\,R\cos\theta}+\frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{2}\frac{2\,x\,R\sin\theta}{x^2+R^2-2\,x\,R\cos\theta}=0$.

Sederhanakan $\frac{\lambda\,d}{d^2+R^2-2\,d\,R\cos\theta}=\frac{\lambda'\,x}{x^2+R^2-2\,x\,R\cos\theta}$.

Kali silang, $\lambda'x\,d^2+\lambda'x\,R^2-2\lambda'x\,d\,R\cos\theta=\lambda\,d\,x^2+\lambda\,d\,R^2-2\lambda\,x\,d\,R\cos\theta$.

Karena hasil ini harus benar untuk seluruh sudut θ, koefisien yang memiliki ketergantungan terhadap θ harus nol.

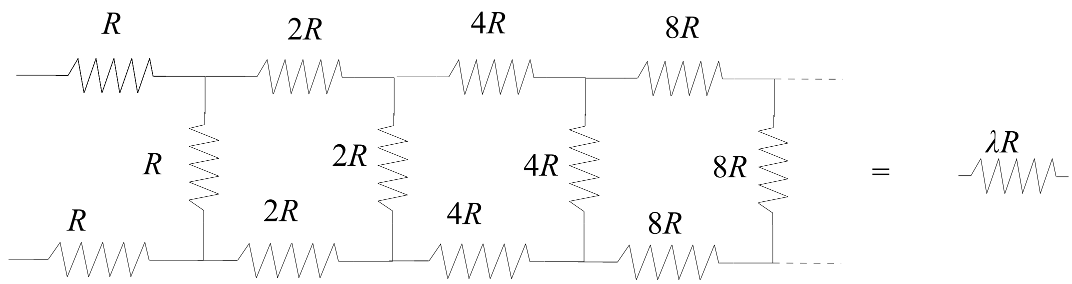
Didapat $\lambda' = -\lambda$.

Gunakan hasil ini pada persamaan terakhir, didapat $x=\frac{R^2}{d}$.

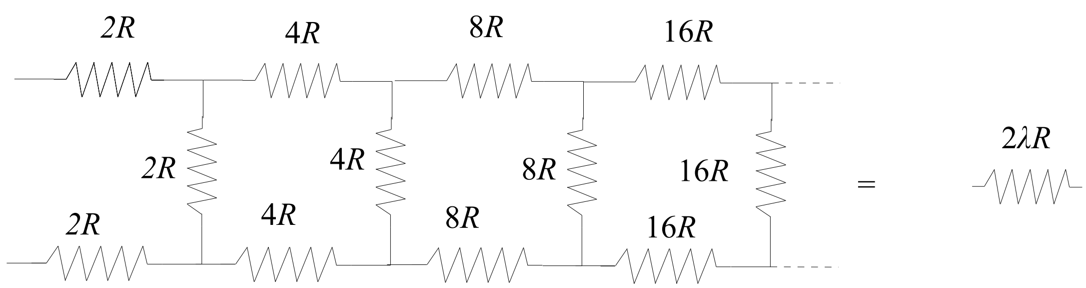
Jadi sistem ini setara dengan sebuah muatan garis λ di $x=d$, dan sebuah muatan garis lainnya $-\lambda$ di $x=R^2/d$.

Gaya per satuan panjang di antara mereka berdua adalah $\dfrac{F}{L}=\dfrac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0\left(d-\dfrac{R^2}{d}\right)}=\dfrac{\lambda^2 d}{2\pi\epsilon_0\left(d^2-R^2\right)}$.

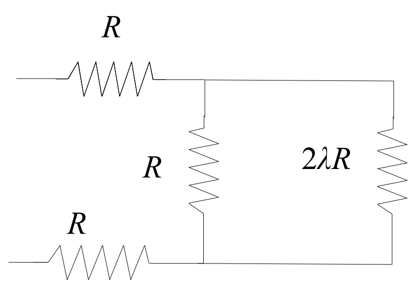
5. Hambatan pengganti seluruh sistem sebanding dengan R atau bisa ditulis sebagai λR, dengan λ adalah konstanta tanpa dimensi.



Sekarang tinjau sistem yang hanya terdiri dari resistor di bawah. Dengan Argumen seperti di atas, bisa dipastikan bahwa hambatan penggantinya adalah $\lambda(2R)$.



Sekarang rangkaian pertama bisa digambar sebagai berikut:



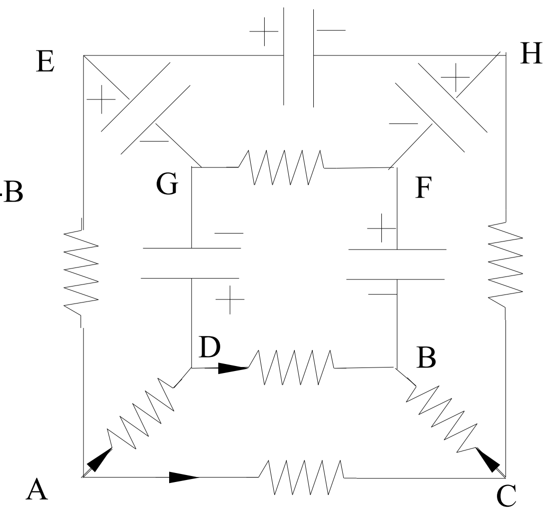
Jadi didapat $(2\lambda R\ //\ R) + R + R = \lambda R$.

atau $\dfrac{R.\lambda R}{R+\lambda R}+2R=\lambda R$ atau $2\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$.

Selesaikan didapat $\lambda=\dfrac{5\pm\sqrt{41}}{4}$.

Ambil akar positif $\lambda=\dfrac{5+\sqrt{41}}{4}$, sehingga didapat $R_p=\dfrac{5+\sqrt{41}}{4}R$

6.



- AE tidak ada arus karena EG dan EH kapasitor
- Demikian juga CH tidak ada arus.
- Jadi arus mengalir dari A – D – B dan A – C -B seperti ditunjukkan oleh anak panah
- $V_{AB} = V_{AD} + V_{DB} = iR + iR$, jadi

  $V_{AD} = ½\ V$,

  $V_{DB} = ½\ V$,

  $V_{AC} = ½\ V$ dan

  $V_{CB} = ½\ V$.
- Anggap polarisasi kapasitor seperti pada gambar. Jika asumsi salah, maka akan diperoleh hasil tegangan negatif. Gunakan hukum Kirchoof:
- Loop DGFB : $\dfrac{Q_{DG}}{C}+\dfrac{Q_{FB}}{C}=\dfrac{V}{2}$
- Loop AEGD : $\dfrac{Q_{EG}}{C}-\dfrac{Q_{DG}}{C}=\dfrac{V}{2}$
- Loop AEHC : $\dfrac{Q_{EH}}{C}=\dfrac{V}{2}$
- Loop BCHF : $\dfrac{Q_{HF}}{C}+\dfrac{Q_{FB}}{C}=\dfrac{V}{2}$
- Kekekalan muatan $Q_{FB} = Q_{HF} + Q_{EG} + Q_{DG}$.
- Dengan menyelesaikan kelima persamaan ini, didapat

  $Q_{DG} = 0$,

  $Q_{FB} = ½\ CV$,

  $Q_{EG} = ½\ CV$,

  $Q_{EH} = ½\ CV$,

  $Q_{HF} = 0$.
- Jadi muatan pada kapasitor dekat B adalah ½ CV.

7. Soal ini dapat dikerjakan dengan menggunakan prinsip superposisi.

   Jadi pertama tinjau sistem yang hanya terdiri dari titik A, tanpa titik B, dimana arus I_0 mengalir ke dalam bahan.

   Sebaran arus membentuk permukaan setengah bola, sehingga didapat $\mathbf{J}=\dfrac{I_0\hat{\mathbf{r}}}{2\pi r^2}$.

Dari hukum Ohm, didapat hubungan $\mathbf{E}=\frac{I_0 \rho \hat{\mathbf{r}}}{2\pi r^2}$.

Potensial akibat titik A pada titik C adalah $V_{CA}=\frac{I_0 \rho}{2\pi a}$.

Potensial akibat titik A pada titik D adalah $V_{DA}=\frac{I_0 \rho}{2\pi a\sqrt{2}}$.

Sekarang tinjau sistem yang hanya terdiri dari titik B tanpa titik A, dimana arus mengalir keluar bahan. Vektor **J dan E** hanya berubah arah, sehingga didapat potensial yang negatif.

Potensial akibat titik B pada titik C adalah $V_{CB}=-\frac{I_0 \rho}{2\pi a\sqrt{2}}$.

Potensial akibat titik B pada titik D adalah $V_{DB}=-\frac{I_0 \rho}{2\pi a}$.

Jadi potensial titik C adalah $V_C = V_{CA} + V_{CB}$, dan potensial titik D adalah $V_D = V_{DA} + V_{DB}$. Beda potensial titik C dan D adalah $V_C - V_D. = V_0$.

Jadi $V_0=\frac{I_0 \rho}{\pi a}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, atau

$$\rho=\frac{\pi a V_0}{I_0}\left(2+\sqrt{2}\right)$$