SOLUSI

1.

A. Waktu bola untuk jatuh diberikan oleh : $t_A = \sqrt{\frac{2H}{g}}$

Jarak d yang dibutuhkan adalah $d = v_0 t_A = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$

B.

i. Karena bola tidak slip sama sekali dan tumbukan lenting sempurna maka energi mekanik sistem kekal.

ii. Gaya gesek arahnya ke sumbu x negatif (melawan arah gerak relatif bola)

iii. Impuls gaya gesek: $I_A = m v_0 - m v'_{A,x}$.

iv. Impuls sudut dari gaya gesek: $I_A R = \frac{2}{5} m R^2 \omega'_A$

C. Hukum kekekalan energi: $\frac{1}{2} m \left(v_0^2 + v_{A,y}^2 \right) = \frac{1}{2} m \left(v'^2_{A,x} + v'^2_{A,y} \right) + \frac{1}{2} . \frac{2}{5} m R^2 \omega'^2_A$

Karena tumbukan lenting sempurna, kecepatan bola dalam arah vertikal tidak berubah sehingga $v_{A,y} = v'_{A,y}$.

Sederhanakan, didapat : $v_0^2 = v'^2_{A,x} + \frac{2}{5} R^2 \omega'^2_A$

Gunakan hubungan impuls: $I_x = m \left(v_0 - v'_{A,x} \right) = \frac{2}{5} m R \omega'_A$,

didapat $v_0^2 - v'^2_{A,x} = \frac{2}{5} \left(\frac{5}{2} \left(v_0 - v'_{A,x} \right) \right)^2$

atau $\left(v_0 - v'_{A,x} \right) \left(v_0 + v'_{A,x} \right) = \frac{5}{2} \left(v_0 - v'_{A,x} \right)^2$

Ada 2 solusi: $v'_{A,x} = v_0$ dan $v'_{A,x} = \frac{3}{7} v_0$

Solusi yang benar adalah solusi kedua: $v'_{A,x} = \frac{3}{7} v_0$ dengan $\omega'_A = \frac{5}{2R} \left(v_0 - v'_{A,x} \right) = \frac{10 v_0}{7R}$

D. Untuk menghitung posisi tumbukan kedua di B, kita perlu menghitung waktu agar bola bisa menyentuh keping atas K_1. Persamaan yang digunakan hanyalah persamaan gerak parabola:

$$h = v_{A,y} t_B - \frac{1}{2} g t_B^2$$

dengan $v_{A,y} = \sqrt{2gH}$

Selesaikan persamaan kuadrat ini, didapat:

$$t_B=\frac{\sqrt{2gH}\pm\sqrt{2gH-2gh}}{g}=\sqrt{\frac{2H}{g}}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{h}{H}}\right)$$

Ambil solusi negatif dan masukkan harga h = 0,75 H: $t_B=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2H}{g}}$

Jarak horizontal yang ditempuh bola adalah $x_B=v_x t_B=\frac{3}{7}v_0\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2H}{g}}=\frac{3}{14}d$, sehingga dengan koordinat $\mathrm{B}(\lambda d,h)=\mathrm{B}(d+x_\mathrm{B},h)=\mathrm{B}\left(\frac{17}{14}d,h\right)$ diperoleh $\lambda=\frac{17}{14}$

E. Proses tumbukan kedua mirip dengan proses tumbukan pertama. Yang perlu diperhatikan adalah ada perubahan persamaan impuls-nya. Karena rotasi bola terlalu cepat ($\omega'_A R > v'_{A,x}$) maka gaya gesek berusaha mengurangi kecepatan rotasi sehingga gaya gesek arahnya juga ke sumbu x negatif.

F. Besarnya impuls gaya gesek diberikan oleh $I_B=m\left(\frac{3}{7}v_0-v'_{B,x}\right)$

dengan $v'_{B,x}$ adalah kecepatan bola setelah tumbukan.

Impuls sudut diberikan oleh $I_B R=\frac{2}{5}mR^2\left(\frac{10}{7}\frac{v_0}{R}-\omega'_B\right)$

dengan ω'_B adalah kecepatan sudut bola setelah tumbukan.

Hukum kekekalan energi:

$$E=\frac{1}{2}m\left(v'^2_{B,x}+v'^2_{B,y}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2\omega'^2_B=\frac{1}{2}m\left(v^2_{B,x}+v^2_{B,y}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2\omega^2_B \quad .$$

Kecepatan dalam arah x: $v_{B,x}=v'_{A,x}=\frac{3}{7}v_0$ dan kecepatan sudut: $\omega_B=\omega'_A=\frac{10v_0}{7R}$.

Karena tumbukan lenting sempurna, berlaku: $v_{B,y}$ = $v'_{B,y}$.

Dari hubungan impuls, didapat $\omega'_B=\frac{5}{2R}\left(\frac{1}{7}v_0+v'_{B,x}\right)$

Masukkan semua informasi ini ke persamaan energi, didapat: $v'^2_{B,x}+\frac{10}{49}v'_{B,x}v_0-\frac{93}{343}v_0^2=0$.

Faktorkan, dengan memperhatikan bahwa salah satu solusi adalah solusi untuk kasus tidak terjadi tumbukan: $\left(v'_{B,x}-\frac{3}{7}v_0\right)\left(v'_{B,x}+\frac{31}{49}v_0\right)=0$

Sehingga didapat $v'_{B,x}=-\frac{31}{49}v_0$ dan $\omega'_B=-\frac{60}{49}\frac{v_0}{R}$

G. Waktu untuk bola bergerak dari B ke C sama dengan waktu bola bergerak dari A ke B. Jarak yang ditempuh bola adalah $d_{\mathrm{BC}}=v'_{B,x}\frac{t_A}{2}=-\frac{31}{98}d$.

Artinya jarak titik C dari titik asal O(0,0) adalah $d+x_{\mathrm{B}}+d_{\mathrm{BC}}=d+\frac{3}{14}d-\frac{31}{98}d=\frac{44}{49}d$, sehingga koordinat titik C adalah $\left(\frac{44}{49}d\,,\,0\right)$

2. Oleh karena tiap partikel dalam tali memiliki kelajuan yang sama, maka energi kinetik tali adalah

$$E_K=\frac{1}{2}M\,v^2$$

Pada saat ujung bebas tali sudah tergeser sejauh *x* dari posisi awal, energi potensial pegas adalah

$$E_p^{\text{pegas}}=\frac{1}{2}k\,x^2=\frac{1}{2}\left(\frac{M\,g}{2\,L}\right)x^2=\frac{M\,g\,x^2}{4\,L}$$

Sementara itu, energi potensial gravitasi tali relatif terhadap posisi awal adalah

$$E_p^{\text{tali}}=-\left(\frac{M}{4\,L}x\right)g\left(L+\frac{1}{2}x\right)=-\frac{M\,g\,x}{8\,L}(2\,L+x)$$

sehingga energi potensial total sistem adalah

$$E_p=E_p^{\text{pegas}}+E_p^{\text{tali}}=\frac{M\,g\,x}{8\,L}(x-2\,L)$$

A. Persamaan kekekalan energi mekanik *E* tali adalah

$$\frac{1}{2}M\,v^2+\frac{M\,g}{8\,L}\,x(x-2\,L)=E$$

Diketahui pada saat awal (t = 0), x = 0, dan v = 0 sehingga E = 0. Dengan demikian

$$v^2=\frac{g}{4\,L}x(2\,L-x) \qquad (1)$$

B. Selanjutnya dari pers. (1) dapat dihitung derivatif terhadap waktu (t), yaitu

$$2\,v\frac{dv}{dt}=\frac{g}{4\,L}\left(2\,L\frac{dx}{dt}-2\,x\frac{dx}{dt}\right)$$

sehingga

$$\frac{dv}{dt}=\frac{g}{4\,L}(L-x) \quad \text{atau} \quad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{g}{4\,L}(L-x)$$

Artinya, persamaan gerak ujung bebas tali untuk pergeseran *x* adalah

$$\frac{d^2}{dt^2}(x-L)+\frac{g}{4L}(x-L)=0$$

yang tidak lain adalah persamaan gerak osilasi harmonik sederhana di sekitar titik $x = L$. Dengan demikian, besar periode osilasi adalah

$$T=2\pi\sqrt{\frac{4L}{g}}=4\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

dan karena $v = 0$ untuk $x = 0$ maka amplitudo osilasi adalah L.

3.

A. Jika kecepatan sudut cincin adalah ω, maka energi kinetik translasi cincin adalah

$$EK_T=\frac{1}{2}Mv^2=\frac{1}{2}MR^2\omega^2$$

Energi kinetik rotasi cincin adalah:

$$EK_R=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}MR^2\omega^2$$

Energi kinetik total: $EK=MR^2\omega^2$

Energi potensial: $EP=-MgR\cos\theta$

Bandingkan hasil ini dengan bandul sederhana (yang memiliki energi kinetik: $EK=\frac{1}{2}MR^2\omega^2$

dan energi potensial $EP=-MgR\cos\theta$, periode diberikan oleh $T=2\pi\sqrt{\frac{MR^2}{MgR}}=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$).

Sehingga periode osilasi sistem ini diberikan oleh $T=2\pi\sqrt{\frac{2MR^2}{MgR}}=2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$

Jika menggunakan metode gaya/torka:

Momen inersia terhadap titik O: $I_{cm} + MR^2 = 2\,MR^{2.}$

Torka terhadap titik O:

$$-MgR\sin\theta=2MR^2\alpha_\theta$$

Sederhanakan: $\alpha_\theta+\frac{g}{2R}\sin\theta=0$

Untuk amplitudo sudut kecil ($\sin\theta \approx \theta$), periode osilasi diberikan oleh $T=2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$

B.

i. Perhatian gambar. Busur AB = busur A'B' = $r\theta$.

$$\varphi=\theta-\frac{A'B'}{R}=\theta\left(1-\frac{r}{R}\right)$$

ii. Jika laju perubahan sudut θ adalah ω_θ , maka energi kinetik translasi cincin adalah

$$EK_T=\frac{1}{2}M\,v^2=\frac{1}{2}M\,(R-r)^2\omega_\theta^2$$

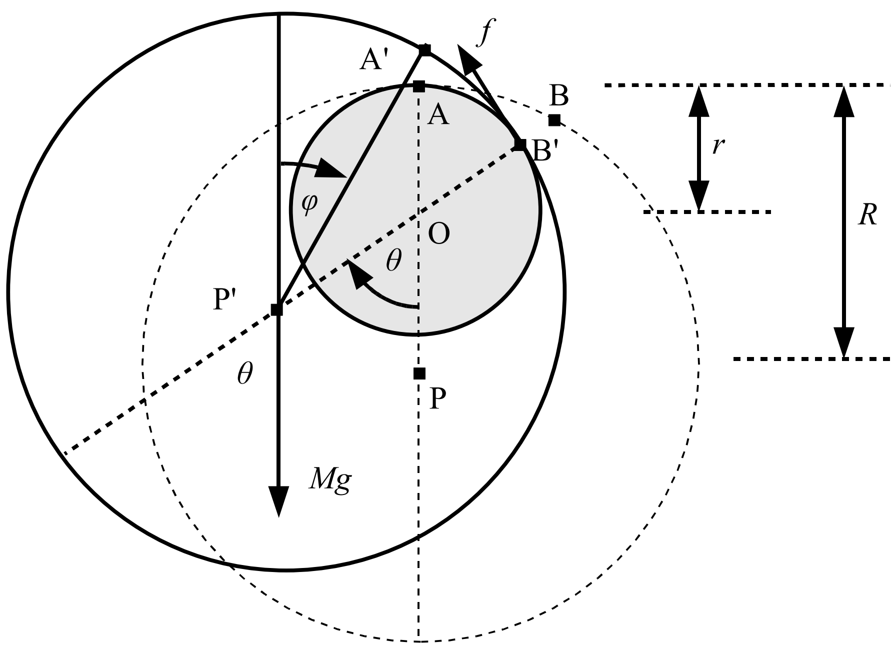
Energi kinetik rotasi cincin adalah:

$$EK_R=\frac{1}{2}I\,\omega_\varphi^2=\frac{1}{2}M\,R^2\omega_\theta^2\left(1-\frac{r}{R}\right)^2=\frac{1}{2}M(R-r)^2\,\omega_\theta^2$$

Energi kinetik total: $EK=M\,(R-r)^2\omega_\theta^2$

Energi potensial: $EP=-M\,g\,(R-r)\cos\theta$

Jadi periode osilasi diberikan oleh $T=2\pi\sqrt{\frac{2\,M\,(R-r)^2}{M\,g(R-r)}}=2\pi\sqrt{\frac{2(R-r)}{g}}$



Jika menggunakan metode gaya/torka:

Tinjau gaya dalam arah tegak lurus P'B'

$$-M\,g\sin\theta+f=M\,(R-r)\,\alpha_\theta$$

Persamaan gerak rotasi terhadap pusat cincin:

$$-f\,R=M\,R^2\alpha_\varphi$$

Gunakan hubungan pada bagian i:

$$\alpha_\varphi = \alpha_\theta \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

Gabungkan ketiga persamaan ini, didapat

$$-M\, g \sin\theta = 2\, M\,(R-r)\,\alpha_\theta$$

sederhanakan: $\alpha_\theta + \dfrac{g}{2(R-r)} \sin\theta = 0$

Untuk amplitudo sudut kecil (sin $\theta \approx \theta$), periode osilasi diberikan oleh $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{2(R-r)}{g}}$

iii. Jika r menuju nol didapat $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{2R}{g}}$

C.

i. $\varphi = \theta\left(1 - \dfrac{r}{R}\right) + \beta \dfrac{r}{R}$

ii. Untuk mencari hubungan sudut-sudut ini, tinjau gerak rotasi kedua cincin. Ada gaya gesek antara kedua cincin.

Persamaan gerak rotasi cincin besar: $-f\, R = M\, R^2 \alpha_\varphi$

Persamaan gerak rotasi cincin kecil: $f\, r = m\, r^2 \alpha_\beta$

Eliminasi gaya gesek *f*, didapat $M\, R\alpha_\varphi + m\, r\, \alpha_\beta = 0$

sehingga hubungan kecepatan sudut diberikan oleh: $M\, R\omega_\varphi + m\, r\, \omega_\beta = 0$

Dari hubungan sudut dari bagian i, didapat $\omega_\varphi = \omega_\theta \left(1 - \dfrac{r}{R}\right) + \omega_\beta \dfrac{r}{R}$

Gabungkan kedua hubungan kecepatan sudut ini:

$$\omega_\varphi = \frac{m}{m+M}\, \omega_\theta \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

dan

$$\omega_\beta = -\frac{M}{m+M}\, \omega_\theta \frac{R}{r} \left(1 - \frac{r}{R}\right) \quad .$$

Energi kinetik rotasi cincin besar: $\dfrac{1}{2} M\, R^2 \omega_\varphi^2 = \dfrac{m^2 M}{2\,(m+M)^2}\, \omega_\theta^2 (R-r)^2$

Energi kinetik rotasi cincin kecil: $\dfrac{1}{2} m\, r^2\, \omega_\beta^2 = \dfrac{m\, M^2}{2(m+M)^2}\, \omega_\theta^2 (R-r)^2$

Energi kinetik translasi cincin besar: $\dfrac{1}{2} M\, v^2 = \dfrac{1}{2} M\,(R-r)^2\, \omega_\theta^2$

Energi kinetik total: $\frac{mM}{2(m+M)}\omega_\theta^2(R-r)^2+\frac{1}{2}M\omega_\theta^2(R-r)^2=\frac{1}{2}M\omega_\theta^2(R-r)^2\frac{2m+M}{m+M}$

Energi potensial: $EP=-Mg(R-r)\cos\theta$

Jadi periode osilasi diberikan oleh $T=2\pi\sqrt{\frac{M(R-r)^2\frac{2m+M}{m+M}}{Mg(R-r)}}=2\pi\sqrt{\left(\frac{R-r}{g}\right)\frac{2m+M}{m+M}}$

Jika menggunakan metode gaya/torka:

Tinjau gaya dalam arah tegak lurus P'B'

$$-Mg\sin\theta+f=M(R-r)\alpha_\theta$$

Persamaan gerak rotasi sudah diberikan pada bagian pembahasan energi:

$$-fR=MR^2\alpha_\varphi$$

$$fr=mr^2\alpha_\beta$$

Gabungkan hasil ini dengan persamaan pada bagian i: didapat:

$$f=-\frac{mM}{m+M}\alpha_\theta(R-r)$$

Masukkan ini ke persamaan gaya:

$$-Mg\sin\theta=\frac{mM}{m+M}\alpha_\theta(R-r)+M(R-r)\alpha_\theta$$

Sederhanakan:

$$\alpha_\theta+\frac{g}{R-r}\frac{m+M}{2m+M}\sin\theta=0$$

Untuk amplitudo sudut kecil ($\sin\theta\approx\theta$), didapat $T=2\pi\sqrt{\left(\frac{R-r}{g}\right)\frac{2m+M}{m+M}}$

iii. Untuk limit *m* besar, didapat $T=2\pi\sqrt{\frac{2(R-r)}{g}}$.

4.

A. Tanpa ada medan magnet, muatan 1 akan bergerak ke kiri (sumbu *y* negatif). Agar muatan berbelok ke atas, dibutuhkan medan magnet $\mathbf{B}_1$ ke luar bidang kertas (sumbu *x* positif). Demikian juga dengan muatan 2, tanpa medan magnet, muatan 2 akan bergerak ke kanan (sumbu *y* positif). Agar muatan 2 berbelok ke atas, dibutuhkan medan magnet $\mathbf{B}_2$ masuk ke bidang kertas (sumbu *x* negatif).

B. Gaya yang bekerja pada muatan 1: $\mathbf{F_1}=-\frac{k\,q^2}{(2\,y)^2}\hat{\mathbf{y}}-B\,q\,v_{1,y}\hat{\mathbf{z}}+B\,q\,v_{1,z}\hat{\mathbf{y}}$

Gaya yang bekerja pada muatan 2: $\mathbf{F_2}=\frac{k\,q^2}{(2\,y)^2}\hat{\mathbf{y}}+B\,q\,v_{2,y}\hat{\mathbf{z}}-B\,q\,v_{2,z}\hat{\mathbf{y}}$

dengan $\hat{\mathbf{y}}$ dan $\hat{\mathbf{z}}$ berturut-turut adalah vektor satuan yang menyatakan arah *y* positif dan arah *z* positif.

Persamaan gerak muatan 2:

sumbu *y*: $m\,a_{2,y}=\frac{k\,q^2}{4\,y^2}-B\,q\,v_{2,z}$

sumbu *z*: $m\,a_{2,z}=B\,q\,v_{2,y}$

C. Energi mekanik kekal, karena medan magnet tidak bisa mengerjakan usaha.

D. Persamaan energi: $\frac{k\,q^2}{2\,d}=\frac{k\,q^2}{2\,y}+2.\left(\frac{1}{2}m\,v_y^2+\frac{1}{2}m\,v_z^2\right)$.

Faktor 2 dimasukkan karena energi kinetik kedua muatan sama besar.

Untuk mencari ukuran kotak, kita butuh kecepatan dalam arah *y* sama dengan nol saat jarak kedua muatan adalah 2*L*.

Untuk mencari kecepatan dalam arah *z*, kita hanya butuh melakukan integral sederhana yaitu dari persamaan $m\,a_{2,z}=B\,q\,v_{2,y}$ atau $m\frac{dv_{2,z}}{dt}=B\,q\frac{dy_2}{dt}$ sehingga $m\,dv_{2,z}=B\,q\,dy_2$.

Karena kecepatan mula-mula dalam arah *z* adalah nol, saat *y* = *d*, maka didapat

$$m\,v_z=B\,q(L-d)$$

Gunakan hasil ini pada persamaan energi, didapat

$$\frac{k\,q^2}{2\,d}=\frac{k\,q^2}{2\,L}+m\left(\frac{B\,q(L-d)}{m}\right)^2$$

Sederhanakan: $\frac{k}{2}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{L}\right)=\frac{B^2(L-d)^2}{m}$

atau $\frac{k\,m}{2\,B^2}=(L-d)\,L\,d$

Selesaikan persamaan kuadrat ini, didapat $L=\frac{d}{2}\left[1\pm\sqrt{1+\frac{2\,k\,m}{B^2d^3}}\right]$

Ambil solusi positif: $L=\frac{d}{2}\left[1+\sqrt{1+\frac{2\,k\,m}{B^2d^3}}\right]$