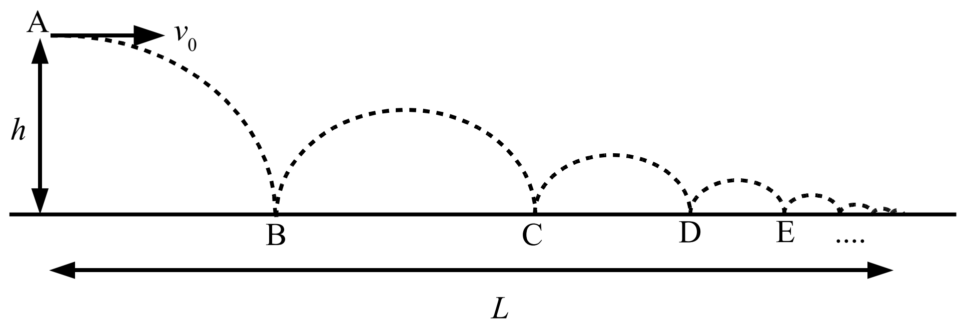
1. Gerak benda di antara tumbukan merupakan gerak parabola.

Sebut posisi mula-mula benda adalah titik A, posisi terjadinya tumbukan pertama kali adalah titik B, posisi terjadi tumbukan kedua kalinya adalah titik C, dan seterusnya.



Persamaan gerak A ke B dalam arah vertikal: $y_{AB} = h - ½\, g t_{AB}^2$. ($y_{AB}$=0 di tanah); (1)

persamaan gerak A ke B dalam arah horizontal: $x_{AB} = v_0 t_{AB}$; (2)

dengan t_{AB}, x_{AB} dan y_{AB} adalah waktu, jarak dalam arah x dan jarak dalam arah y yang ditempuh benda dihitung dari titik A.

Sehingga waktu dari A ke B diberikan oleh $T_{AB}=\sqrt{\frac{2h}{g}}$, (3)

dan jarak horizontal A ke B adalah $X_{AB}=v_0 T_{AB}=v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$. (4)

Kecepatan vertikal persis sebelum tumbukan di B adalah $v_{B,y}=-g\,T_{AB}=-\sqrt{2gh}$ (5)

Kecepatan vertikal persis setelah tumbukan di B adalah $v'_{B,y}=-e\,v_{B,y}=e\sqrt{2gh}$ (6)

Persamaan gerak B ke C dalam arah vertikal: $y_{BC} = v'_{B,y} t_{BC} - ½\, g t_{BC}^2$; (7)

persamaan gerak B ke C dalam arah horizontal: $x_{BC} = v_0 t_{BC}$; (8)

dengan t_{BC}, x_{BC} dan y_{BC} adalah waktu, jarak dalam arah x dan y yang ditempuh benda dihitung dari titik B.

Waktu dari B ke C diberikan oleh $T_{BC}=\frac{2v'_{B,y}}{g}=2e\sqrt{\frac{2h}{g}}$, (9)

dan jarak horizontal B ke C adalah $X_{BC}=v_0 T_{BC}=2e\,v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$. (10)

Kecepatan vertikal persis sebelum tumbukan di C adalah $v_{C,y}=-v'_{B,y}=-e\sqrt{2gh}$ (11)

Kecepatan vertikal persis setelah tumbukan di C adalah $v'_{C,y}=-e\,v_{C,y}=e^2\sqrt{2gh}$ (12)

Proses selanjutnya sama, dengan memunculkan faktor e dalam setiap tumbukan:

Waktu dari C ke D diberikan oleh $T_{CD}=2e^2\sqrt{\frac{2h}{g}}$, (13) dan jarak horizontal C ke D adalah $X_{\mathrm{CD}} = 2e^2 v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$. (14)

Waktu total diberikan oleh $T = T_{AB} + T_{BC} + T_{CD} + T_{DE} + ... = T_{AB}(1 + 2e + 2e^2 + 2e^3 + ..)$ (15)

Perhatikan bahwa suku kedua, ketiga, keempat dan seterusnya membentuk deret geometri dengan rasio r adalah e dan suku pertama adalah $2e$. Jumlah deret ini adalah $\frac{a}{1-r} = \frac{2e}{1-e}$.

Sehingga waktu total diberikan oleh $T = T_{\mathrm{AB}}\left(1 + \frac{2e}{1-e}\right) = \sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{1+e}{1-e}$. (16)

Jarak total diberikan oleh $L = v_0 T = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{1+e}{1-e}$. (17)

2. Hubungan massa m, gravitasi g, konstanta pegas k dengan panjang tali mula-mula l_0 dan panjang tali dalam keadaan setimbang l_1 diberikan oleh persamaan kesetimbangan gaya (ingat hukum Hooke berlaku):

$$mg = k(l_1 - l_0). \qquad (1)$$

Hubungan gerak dari panjang l_2 sampai ke langit-langit diberikan oleh hubungan kekekalan energi:

$$\tfrac{1}{2} k (l_2 - l_0)^2 = mgl_2. \qquad (2)$$

Dengan memasukkan hubungan k dari persamaan (1), didapat

$$\frac{mg(l_2 - l_0)^2}{2(l_1 - l_0)} = mgl_2 \qquad (3)$$

Sederhanakan, didapat: $l_2^2 - 2\, l_2 l_1 + l_0^2 = 0.$ (4)

Selesaikan persamaan kuadrat ini, didapat

$$l_2 = l_1 \pm \sqrt{l_1^2 - l_0^2} \ . \qquad (5)$$

Ambil solusi positif (agar $l_2 > l_1$): $l_2 = l_1 + \sqrt{l_1^2 - l_0^2}$ (6)

3. Pertama hitung besarnya tegangan tali yang dibutuhkan agar pusat massa yoyo diam di tempat. Pada keadaan ini, terjadi kesetimbangan antara tegangan tali dan komponen gaya berat yoyo dalam arah bidang miring, yaitu: $T = m\, g \sin \theta.$ (1)

Percepatan sudut yoyo diberikan oleh $\alpha = \frac{T\, r}{I} = \frac{2\, g\, r \sin\theta}{R^2}$. (2)

Karena percepatan sudut ini konstan, maka kecepatan sudut diberikan oleh

$$\omega = \alpha\, t = \frac{2\, g\, t\, r \sin\theta}{R^2} \ . \qquad (3)$$

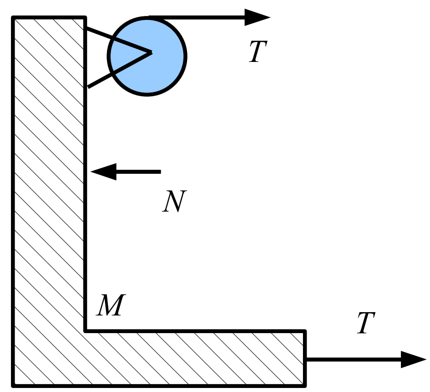
Kecepatan penambahan panjang tali diberikan oleh

$$v = \omega r = \frac{2 g t r^2 \sin\theta}{R^2} \quad . \tag{4}$$

Sehingga daya yang dikerjakan oleh motor sebagai fungsi waktu, diberikan oleh

$$P = T v = \frac{2 m g^2 r^2 t \sin^2\theta}{R^2} \quad . \tag{5}$$

4. Tinjau massa M:



Persamaan gerak dalam arah horizontal:

$$2T - N = Ma_x , \tag{1}$$

Tinjau massa m:

Persamaan gerak dalam arah horizontal:

$$N = ma_x , \tag{2}$$

(a_x = komponen $\mathbf{a}_m$ dalam arah x)

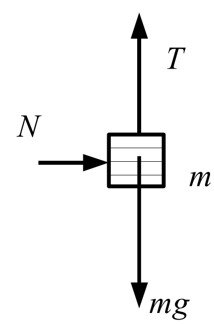
Persamaan gerak dalam arah vertikal:

$$mg - T = ma_y . \tag{3}$$

(a_y = komponen $\mathbf{a}_m$ dalam arah y)

Hubungan percepatan arah x dan y:

$$a_y = 2\, a_x. \tag{4}$$



Substitusikan persamaan (4) ke (1) + (2) + 2*(3) :

$$2mg = (M+m)\, a_x + 4ma_x. \tag{5}$$

Didapat :

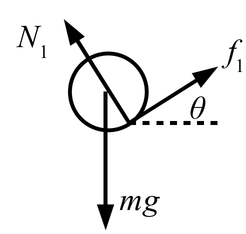
$$a_x = \frac{2\, m}{M + 5\, m}\, g \tag{6}$$

dan

$$a_y = \frac{4\, m}{M + 5\, m}\, g \tag{7}$$

5. Pertama tinjau gaya-gaya yang bekerja pada bola: gaya berat dalam arah vertikal ke bawah (mg), gaya normal (N_1) dalam arah tegak lurus bidang kontak, dan gaya gesek dalam arah ke atas bidang miring (f_1).

Persamaan gerak bola:



searah bidang miring: $mg \sin\theta - f_1 = ma,$ (1)

tegak lurus bidang miring: $N_1 - mg \cos\ \theta = 0.$ (2)

gerak rotasi: $f_1 R = I\alpha$ (3)

Karena tidak slip, didapat hubungan $a = \alpha R$. (4)

Dari keempat persamaan ini dan momen inersia bola, didapat

$$a = \frac{5}{7} g \sin\theta \quad , \qquad (5)$$

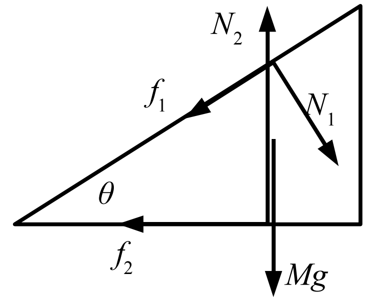
$$f_1 = \frac{2}{7} mg \sin\theta \quad , \qquad (6)$$

$$N_1 = mg \cos \theta . \qquad (7)$$

Kesetimbangan gaya pada bidang miring:

dalam arah x: $N_1 \sin \theta - f_1 \cos \theta - f_2 = 0$ (8)

dalam arah y: $N_2 - N_1 \cos \theta - f_1 \sin \theta - Mg = 0$ (9)



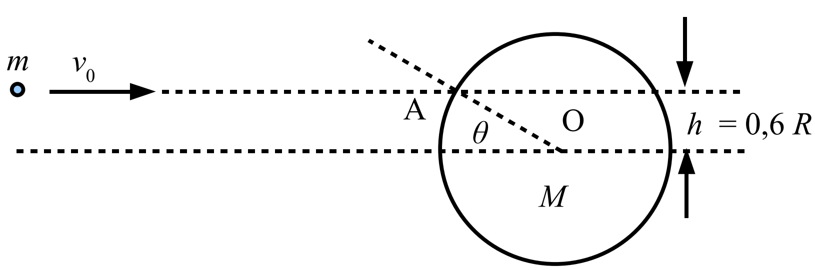
Sehingga didapat $N_2 = \left(M + m\cos^2\theta + \frac{2}{7} m \sin^2\theta \right) g$ (10)

$$f_2 = \frac{5}{7} mg \sin\theta \cos\theta \qquad (11)$$

Koefisien gesek minimum: $\mu = \frac{f_2}{N_2} = \frac{5\, m \sin\theta \cos\theta}{7M + 7m\cos^2\theta + 2m\sin^2\theta}$ (12)

6. Pilih sistem koordinat dengan sumbu OA dan sumbu tegak lurus OA.

   Dalam arah tegak lurus sumbu OA tidak terjadi perubahan kecepatan pada massa m maupun massa M. Dalam arah sejajar sumbu OA, terjadi tumbukan elastik.



Kecepatan m dalam arah tegak lurus sumbu OA: $v_0 \sin \theta$. (1)

Kecepatan m dalam arah sejajar sumbu OA: $v_0 \cos \theta$. (2)

Dalam arah sejajar sumbu OA, sebuah massa m yang bergerak dengan kecepatan $v_0 \cos \theta$ menabrak massa M. Ada beberapa cara menentukan hasil tumbukan, salah satunya dengan menggunakan kerangka pusat massa. Kecepatan pusat massa diberikan oleh

$$v_{cm} = \frac{m}{M+m} v_0 \cos\theta \qquad (3)$$

Dalam kerangka pusat massa, kecepatan massa m sebelum tumbukan adalah

$$v_{m,cm}=v_0\cos\theta-v_{cm}=\frac{M}{M+m}v_0\cos\theta \quad , \tag{4}$$

dan kecepatan massa M sebelum tumbukan adalah

$$v_{M,cm}=0-v_{cm}=-\frac{m}{M+m}v_0\cos\theta \quad . \tag{5}$$

Setelah tumbukan, kecepatan kedua massa hanya berubah arah:

$$v'_{m,cm}=-v_{m,cm}=-\frac{M}{M+m}v_0\cos\theta \quad , \tag{6}$$

$$v'_{M,cm}=-v_{M,cm}=\frac{m}{M+m}v_0\cos\theta \quad . \tag{7}$$

Dalam kerangka lab, kecepatan kedua massa adalah:

$$v'_m=v'_{m,cm}v_{cm}=\frac{m-M}{M+m}v_0\cos\theta \quad , \tag{8}$$

$$v'_M=v'_{M,cm}+v_{cm}=\frac{2m}{M+m}v_0\cos\theta \quad , \tag{9}$$

dalam arah sejajar sumbu OA.

Kecepatan m dalam arah x: $\quad v_0\sin^2\theta+\frac{m-M}{m+M}v_0\cos^2\theta=\frac{1}{25}v_0$ (10)

Kecepatan m dalam arah y: $\quad v_0\sin\theta\cos\theta-\frac{m-M}{m+M}\sin\theta\cos\theta=\frac{18}{25}v_0$ (11)

Kecepatan M dalam arah x: $\quad \frac{2m}{M+m}v_0\cos^2\theta=\frac{8}{25}v_0$ (12)

Kecepatan M dalam arah y: $\quad -\frac{2m}{M+m}v_0\sin\theta\cos\theta=-\frac{6}{25}v_0$ (13)

7. Pada massa m_1 berlaku hubungan: $\quad m_1g - T_1 = m_1a_1$. (1)

   Pada massa m_2 berlaku hubungan: $\quad T_2 - m_2g\sin\theta = m_2a_2$. (2)

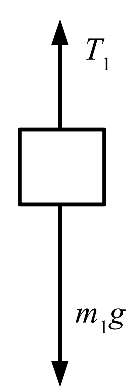
   Karena tali dan katrol tidak bermassa, berlaku hubungan:

   $$T_1 = 2\,T_2 \tag{3}$$

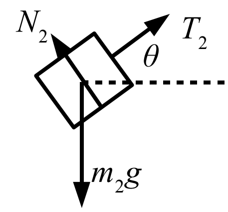
   Dari hubungan bahwa jika balok m_2 naik sejauh x pada bidang miring, maka massa m_1 turun sejauh ½ x sehingga diperoleh hubungan:

   $$a_1 = ½\,a_2. \tag{4}$$

   Dengan menyelesaikan keempat persamaan di atas, didapat:



$$a_1 = \frac{m_1 - 2\,m_2 \sin\theta}{m_1 + 4\,m_2}\,g \qquad (5)$$



Batas minimum besar massa m_1 agar m_1 dapat bergerak turun saat $a_1 = 0$ dalam persamaan (5), sehingga

$$m_1 = 2\ m_2 \sin\theta \qquad (6)$$